Jurnal Matematika UNAND
Vol. .. No. .. Hal. ...
Edisi ....
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

KARAKTERISASI POHON DENGAN BILANGAN DOMINASI-LOKASI-METRIK TIGA

ZULFANETI[a,*], EDY TRI BASKORO[b,c], HILDA ASSIYATUN[b,c]
[a] *Prodi Sains Data, Universitas PGRI Sumatera Barat,*
[b] *Kelompok Keahlian Matematika Kombinatorika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,*
[c] *Pusat Kolaborasi Riset Teori Graf dan Kombinatorika, Bandung, Indonesia.*
email : zulfaneti@upgrisba.ac.id, ebaskoro@itb.ac.id, hilda@itb.ac.id

Diterima ..... Direvisi ..... Dipublikasikan .....

Abstrak. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana dan terhubung. Untuk suatu himpunan $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\} \subseteq V$ dan $v \in V$, representasi titik v terhadap R adalah vektor $r(v|R) = (d(v, r_1), d(v, r_2), \ldots, d(v, r_k))$ dimana $d(v, r)$ menyatakan jarak titik v dan titik r. Himpunan R disebut himpunan pembeda dari G jika semua titik di G memiliki representasi unik terhadap R. Himpunan D disebut himpunan dominasi dari G jika setiap titik di $G - D$ bertetangga dengan suatu titik $v \in D$. Suatu himpunan dominasi dan juga merupakan himpunan pembeda disebut himpunan dominasi-lokasi-metrik dari G. Kardinalitas dari himpunan dominasi-lokasi-metrik minimum dari G disebut bilangan dominasi-lokasi-metrik dari G. Semua graf orde n dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 1, 2, $n - 2$ dan $n - 3$ telah ditentukan secara lengkap. Dalam tulisan ini, kami mengkarakterisasi semua pohon dengan bilangan-dominasi-lokasi-metrik 3 dan secara khusus membuktikan bahwa tidak ada pohon dengan bilangan-dominasi-lokasi-metrik sama dengan dimensi metriknya.

Abstract. *Let G be a simple dan connected graph. For subset $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\} \subseteq V$ and $v \in V$, representation of v with respect to R is the vector $r(v|R) = (d(v, r_1), d(v, r_2), \ldots, d(v, r_k))$, where $d(v, r)$ is the distance between v and r. Subset R is called resolving set of G if representation all vertices in G respect to R is unique. Subset $D \subseteq$ is called dominating set of G if every vertex in $G - D$ is adjacent to some $v \in D$. A dominating set and also resolving set are called the metric-locating-dominating set of G. Cardinality of minimum metric-locating-dominating set of G is called metric-location-domination number of G. All graphs order n d with metric-location-domination number 1, 2, $n - 2$ dan $n - 3$ has been completely determined. In this paper, we characterize all tree with metric-location-domination number 3. In particular, we prove that there is no tree with a metric-location-domination-number equal to metric dimension*

Kata Kunci: Himpunan dominasi, himpunan pembeda, himpunan dominasi-lokasi-metrik

[*] penulis korespondensi

1. Pendahuluan

Konsep bilangan dominasi-lokasi-metrik suatu graf terhubung diperkenalkan pertama kali oleh Brigham dkk. (2003). Konsep ini merupakan gabungan konsep bilangan dominasi dan dimensi metrik, yakni suatu kajian untuk mencari suatu himpunan yang merupakan himpunan dominasi dan juga merupakan himpunan pembeda. Untuk sebarang graf G orde n, hubungan antara bilangan dominasi $\gamma(G)$, dimensi metrik $\beta(G)$, dan bilangan dominasi-lokasi-metrik $\gamma_M(G)$ diberikan oleh $\max\{\gamma(G), \beta(G)\} \leq \gamma_M(G) \leq \min\{\gamma(G) + \beta(G), n-1\}$. Hasil ini sekaligus memberikan batas bawah dan batas atas yang ketat dari bilangan dominasi-lokasi-metrik suatu graf.

Meskipun telah diketahui batas bawah dan batas atas bilangan dominasi-lokasi-metrik sebarang graf, namun penentuan bilangan dominasi-lokasi-metrik suatu graf adalah suatu permasalahan yang belum mempunyai algoritma yang efisien. Hal ini disebabkan oleh beragamnya struktur graf. Oleh karena, itu kajian bilangan dominasi-lokasi-metrik dilakukan dengan membatasi pada keluarga graf tertentu atau dengan mengkarakterisasi graf dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik tertentu. Untuk beberapa kelas graf, bilangan dominasi-lokasi-metrik telah ditentukan [2], [3], [4], dan [5].

Bilangan dominasi-lokasi-metrik dari pohon telah dibuktikan [6]. Untuk menentukan bilangan dominasi-lokasi-metrik sebarang pohon, parameter yang menjadi penentu adalah titik dominasi, titik pendukung, dan titik pendan dari pohon tersebut. Kemudian, dengan metode berbeda ditentukan kembali bilangan dominasi-lokasi-metrik dari sebarang pohon T yaitu parameter bilangan dominasi, dimensi metrik dan banyak daun dari T [7].

Selanjutnya, Henning dan Oellermann (2004) berhasil mengkarakterisasi semua graf dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik $n-2$ dan $n-1$. Selain itu, bilangan dominasi-lokasi-metriknya yang mencapai batas bawah $\gamma_M(T) = \gamma(T)$ telah dapat dikarakterisasi, yaitu $\gamma_M(T) = \gamma(T)$ jika dan hanya jika T tidak memuat titik pendukung kuat [6].

González dkk (2018) dalam [8] melengkapi hasil yang telah diperoleh Henning dan Oellermann (2004). Hasil utama yang diperoleh adalah karakterisasi semua pohon dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik mencapai batas atas, yaitu pohon T dengan $\gamma_M(T) = \gamma(T) + \beta(T)$. Hasil-hasil tersebut memberikan syarat cukup dan syarat perlu untuk struktur pohon dengan kondisi bilangan dominasi-lokasi metrik mencapai batas atas. Selanjutnya, Cáceres dan Pelayo (2023) dalam [9] memperluas hasil tersebut dan memperumum untuk sebarang graf terhubung. Batas bawah bilangan dominasi-lokasi-metrik dari graf G diperoleh melalui pendeteksian banyaknya titik pendan $\ell(G)$ dan keberadaan himpunan titik pendukung $S(G)$ dari G sehingga diperoleh $\gamma_M(G) \geq \gamma(G) + \ell(G) - |S(G)|$.

Graf dengan bilangan dominasi-lokasi metrik kecil sejauh ini telah diketahui adalah graf dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 1 dan bilangan dominasi-lokasi-metrik 2. Graf dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 1 merupakan kondisi trivial yaitu graf lintasan P_1 dan P_2. Graf dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 2 diperoleh sebanyak 51 graf yang tidak isomorfik [10].

Dalam tulisan ini dipaparkan hasil semua pohon dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 3, dan kemudian membahas bahwa tidak ada pohon dengan bilangan dominasi-lokasi-metriknya sama dengan dimensi metriknya.

2. Landasan Teori

Misalkan $G = (V, E))$ adalah graf sederhana dan terhubung. Suatu himpunan $D \subseteq V$ disebut **himpunan dominasi** dari G jika untuk setiap $u \in V - D$ bertetangga dengan suatu titik $d \in D$. **Bilangan dominasi** dari G adalah kardinalitas dari himpunan dominasi minimum dari G, dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Suatu himpunan $R = \{r_1, \ldots, r_p\} \subseteq V$ dan $v \in V$, **representasi** titik v terhadap R adalah suatu vektor $(d(v, r_1), d(v, r_2), \ldots, d(v, r_p))$, di mana $d(x, y)$ adalah jarak antara titik x dan y di G. Suatu himpunan R disebut **himpunan pembeda** dari G jika setiap titik dari G memiliki representasi unik terhadap R. **Dimensi metrik** dari G, dinotasikan sebagai $\beta(G)$, adalah kardinalitas dari himpunan pembeda minimum dari G.

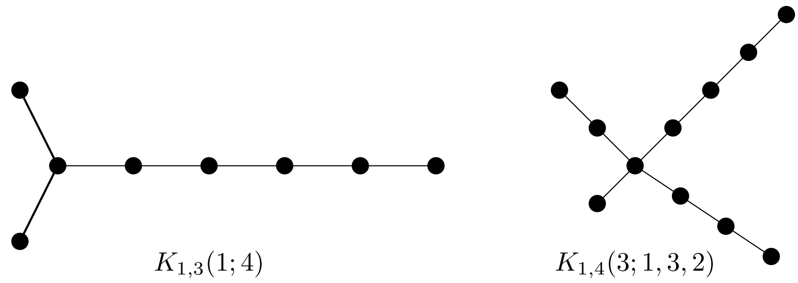
Banyak titik dan sisi dari G secara berturut disebut **orde** dan **ukuran** dari G. Suatu titik v di G **terkait** dengan sisi e jika $v \in e$. Titik u dan v yang terkait dengan sisi e disebut **titik ujung** dari sisi e. Kemudian dua titik u dan v di G dikatakan **bertetanggga**, ditulis $u \sim v$, jika $uv \in E(G)$. Banyak sisi yang terkait pada suatu titik v disebut **derajat** dari v, ditulis $d(v)$.

Suatu titik berderajat 1 disebut **titik pendan**. Titik u dari suatu graf G disebut **titik pendukung** dari G jika titik u tersebut bertetangga dengan suatu titik pendan, dan disebut **titik pendukung kuat** jika bertetangga dengan sedikitnya dua titik pendan.

Jika pada beberapa sisi graf G disisipkan beberapa titik untuk membangun graf baru G', maka G' dinamakan suatu **subdivisi** dari G. **Graf bintang**, $K_{1,n}$ $n \geq 2$, adalah graf yang terdiri dari n titik pendan yang bertetangga ke 1 titik bukan titik pendan. Misalkan diberikan graf bintang $K_{1,n}$ berorde $n + 1$. Graf $K_{1,n}(k; m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k)$ adalah graf yang diperoleh dengan mensubdivisi graf $K_{1,n}$ pada k sisi masing-masing sebanyak $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k$ titik, $m_i \neq 0$. Sebagai contoh, $K_{1,3}(1; 4)$ adalah graf hasil subdivisi $K_{1,3}$ pada 1 sisi sebanyak 4 titik, dan $K_{1,3}(3; 1, 2, 3)$ adalah graf hasil subdivisi $K_{1,4}$ pada 3 sisi berturut-turut sebanyak 1, 2, dan 3 titik, seperti pada Gambar 1.

Untuk suatu pohon, mengacu pada istilah yang digunakan oleh Slater (1975) dalam [11] digunakan istilah-istilah berikut ini: Misalkan v adalah suatu titik di pohon T. Suatu **cabang** di titik v dari pohon T adalah subpohon maksimal yang memuat v sebagai titik ujung. Suatu cabang di v berupa lintasan disebut **lintasan cabang** jika dan hanya jika $d(v) \geq 3$. Titik v disebut **stem** dari lintasan cabang di v. Semua lintasan cabang di v disebut **daun** dengan stem v.

Untuk sebarang graf pohon T telah ditentukan dimensi metriknya. Definisikan titik $v \in V(T)$ dengan $d(v) \geq 3$ sebagai **titik mayor**. Titik pendan u dari T disebut **titik terminal** dari suatu titik mayor v dari T jika $d(u, v) < d(u, w)$ untuk setiap titik mayor w dari T. **Derajat terminal** $ter(v)$ dari titik mayor v adalah banyaknya titik terminal dari v. Suatu titik mayor v dari T adalah **titik mayor eksterior**



Gambar 1. Contoh graf hasil subdivisi dari graf bintang $K_{1,n}$

dari T jika derajat terminalnya positif. Misalkan $\sigma(T)$ dan $ex(T)$ berturut-turut menyatakan banyaknya semua derajat terminal dari semua titik mayor dari T dan banyaknya titik mayor eksterior dari T.

Teorema 2.1. *[11] Jika T adalah pohon bukan lintasan, maka $\beta(T) = \sigma(T) - ex(T)$.*

Untuk lintasan, Penulis dalam [12] telah menentukan bilangan dominasi-lokasi-metrik dari graf k-lintasan. Secara khusus, jika $k = 1$, maka graf tersebut adalah graf lintasan P_n orde n. Seperti pada Teorema 2.2 berikut:

Teorema 2.2. *[12]*

$$\gamma_M(P_n) = \begin{cases} 1 & \textit{jika } n = 1, 2, \\ 2 & \textit{jika } n = 3, \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil & \textit{jika } n \geq 4. \end{cases}$$

Henning dan Oelermann [6] telah mengkarakterisasi semua pohon dengan bilangan dominasi-lokasi metrik mencapai batas bawah dan kemundian merumuskan bilangan dominasi-lokasi-metrik dari sebarang pohon, yang diberikan pada Teorema 2.3 dan Teorema 2.4 berikut:

Teorema 2.3. *Suatu pohon T tidak memiliki titik pendukung kuat jika dan hanya jika $\gamma_M(T) = \gamma(T)$.*

Teorema 2.4. *[6] Untuk sebarang pohon T, $\gamma_M(T) = \gamma(T) + \ell'(T) - |S(T)$, di mana $\gamma(T)$, $S(T)$ dan $\ell'(T)$ berturut-turut menyatakan bilangan dominasi, himpunan titik pendukung kuat, dan banyaknya titik pendan yang bertetangga dengan titik pendukung kuat dari T.*

Hasil pada Teorema 2.4 disajikan kembali pada Teorema 2.5 dengan menggunakan metode berbeda. Misalkan pohon T adalah suatu pohon dengan semua daun $L_1, L_2, \ldots, L_p$, dan l_i menyatakan banyaknya lintasan cabang dengan panjang minimal 2 pada L_i, dan X adalah himpunan titik stem yang tidak mempunyai lintasan cabang dengan panjang 1.

Teorema 2.5. *[7] Untuk sebarang pohon T, $\gamma_M(T) = \gamma(T) + \beta(T) - k$, di mana $\gamma(T)$ dan $\beta(T)$ berturut-turut menyatakan bilangan dominasi dan dimensi metrik dari T, dan $k = l_1 + l_2 + \cdots + l_p - |X|$*

3. Hasil Utama

Pada bagian ini dikarakterisasi pohon dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 3. Selanjutnya juga membuktikan bahwa tidak ada pohon dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik yang sama dengan dimensi metriknya.

Lema 3.1. *Pada sebarang graf terhubung G dengan orde minimal 3 dan mempunyai titik pendan sebanyak $\ell(G)$, berlaku $\gamma_M(G) \geq \ell(G)$.*

Bukti. Misalkan G memiliki titik pendan sebanyak $\ell(G)$. Andaikan S adalah himpunan dominasi-lokasi-metrik dari G dengan $|S| = \ell(G) - 1$.
Kasus 1. Semua anggota S adalah titik pendan. Karena G memiliki titik pendan sebanyak $\ell(G)$, terdapat satu titik pendan u yang tidak berada di S. Ini berarti terdapat titik pendan u dan titik stem v, dimana $u \sim v$. Akibatnya $d(u, S) = d(u, v) + d(v, S) > 1$. Kontradiksi dengan S adalah suatu himpunan dominasi dari G.
Kasus 2. S memuat titik yang bukan titik pendan. Dengan demikian terdapat dua titik pendan u dan v yang tidak berada di S yang memenuhi:

i $u \sim w$ dan $v \sim w$, dengan $w \in S(G)$, dimana $S(G)$ adalah himpunan titik pendukung dari G.
ii $u \sim w$ dan $v \sim z$, dengan $w \neq z$, $w, z \in S(G)$, dimana $S(G)$ adalah himpunan titik pendukung dari G.

Akibatnya, jika (i) terjadi maka $r(u|S) = r(v|S)$, kontradiksi dengan S yang merupakan suatu himpunan pembeda dari G. Jika (ii) terjadi maka $d(u, S) = d(u, w) + d(w, S) > 1$ atau $d(v, z) = d(v, z) + d(z, S) > 1$, kontradiksi dengan S yang merupakan suatu himpunan dominasi dari G. □

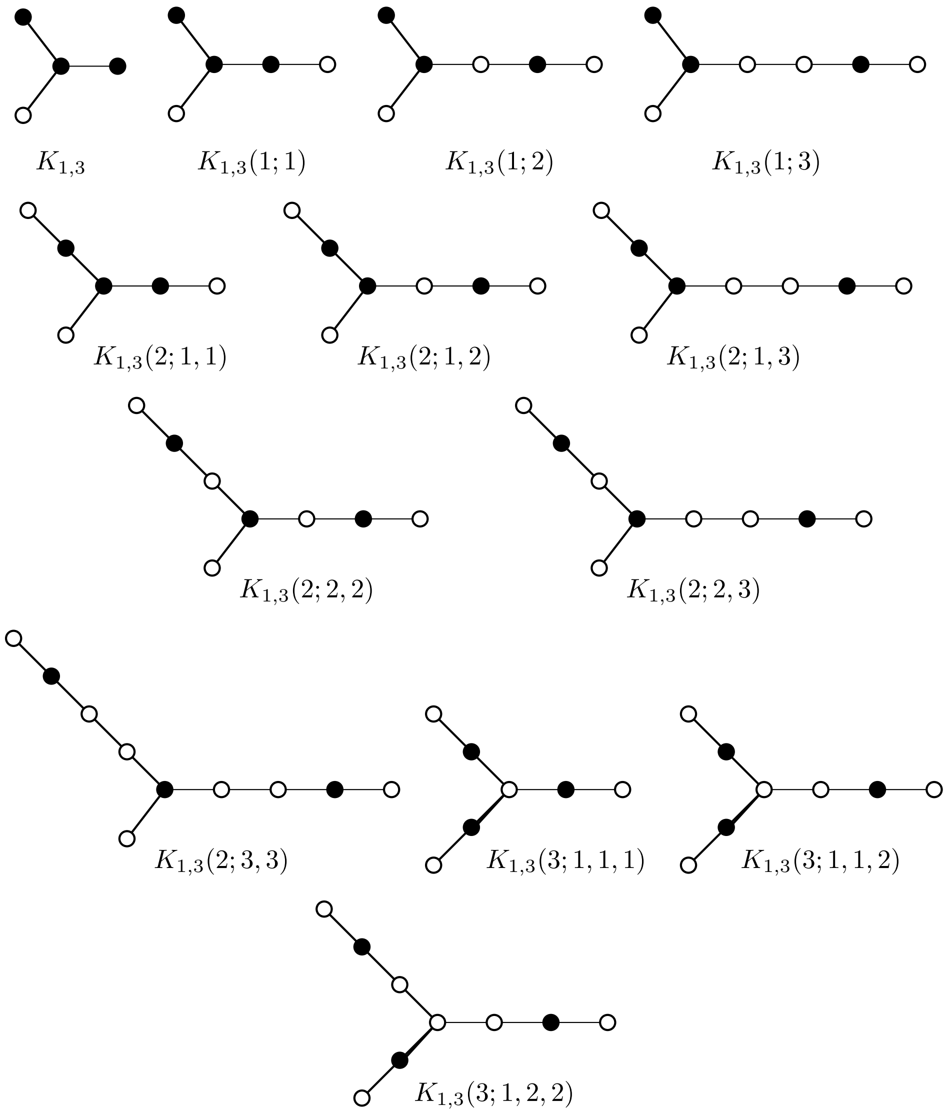
Lema 3.2. *Semua pohon dengan banyaknya titik pendan 3 adalah $K_{1,3}$ atau subdivisi dari $K_{1,3}$.*

Bukti. Misalkan T adalah pohon dengan banyaknya titik pendan 3. Andaikan T bukan $K_{1,3}$ atau bukan subdivisi dari $K_{1,3}$. Ada empat kemungkinan:

(i) $T \cong K_{1,n}$, $n \neq 3$.
(ii) $T \cong K_{1,n}(k; m_1, m_2, \ldots, m_k)$, $n \neq 3$, $k \geq 1$.
(iii) $T \ncong K_{1,n}$, $n \geq 1$.
(iv) $T \ncong K_{1,n}(k; m_1, m_2, \ldots, m_k)$, $n \geq 1$, $k \geq 1$.

Jika (i) atau (ii) terjadi maka jelas T memiliki titik pendan tidak sama dengan 3. Jika (iii) atau (iv) terjadi maka T mempunyai titik stem lebih dari 1, akibatnya T mempunyai lintasan cabang minimal 4, ini berarti T memiliki titik pendan lebih dari 3. Ini kontradiksi dengan T adalah pohon dengan banyaknya titik pendan 3.□

Semua subdivisi dari $K_{1,3}$ dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 3 diberikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf $K_{1,3}(2;k_1,k_2)$ untuk $k_1,k_2 = 1,2,3$ dan $K_{1,3}(3;1,k_1,k_2)$ untuk $k_1,k_2 = 1,2$.

Lema 3.3.

a. $\gamma_M(K_{1,3}) = 3$.
b. $\gamma_M(K_{1,3}(k;m_1,\ldots,m_k)) = 3$ *untuk* $k = 1,2$ *dan* $m_i = 1,2,3,\ i \in [1,k]$.
c. $\gamma_M(K_{1,3}(3;1,m_1,m_2)) = 3$ *untuk* $m_1,m_2 = 1,2$.

Bukti.

a. Pandang graf $K_{1,3}$. Perhatikan bahwa $K_{1,3}$ memiliki $\gamma(K_{1,3}) = 1$, memiliki 1 titik pendukung kuat dan 3 titik pendan yang bertetangga dengan titik pendukung kuat. Berdasarkan Teorema 2.4 diperoleh $\gamma_M(K_{1,3}) = 1 + 3 - 1 = 3$.
b. Pandang graf $K_{1,3}(k; m_1, \ldots, m_k)$, $k = 1, 2$ dan $m_i = 1, 2, 3$, $i \in [1, k]$.
Untuk $k = 1$, perhatikan bahwa $K_{1,3}(k; m_1, \ldots, m_k)$ memiliki 1 titik pendukung kuat dan 2 titik pendan yang bertetangga dengan titik pendukung kuat. Selanjutnya, jelas bahwa $\gamma(K_{1,3}(1; m_1)) = 2$, $m_1 = 1, 2, 3$. Berdasarkan Teorema 2.4 diperoleh $\gamma_M(K_{1,3}(k; m_1, \ldots, m_k)) = 2 + 2 - 1 = 3$.
Untuk $k = 2$, perhatikan bahwa $K_{1,3}(k; m_1, \ldots, m_k)$ tidak memiliki titik pendukung kuat dan $\gamma(K_{1,3}(1; m_1, m_2)) = 3$, $m_1 = 1, 2, 3$. Berdasarkan Teorema 2.3 diperoleh $\gamma_M(K_{1,3}(k; m_1, \ldots, m_k)) = 3$.
c. Pandang graf $K_{1,3}(3; 1, m_1, m_2)$, perhatikan bahwa $K_{1,3}(3; 1, m_1, m_2)$ tidak memiliki titik pendukung kuat dan $\gamma(K_{1,3}(3; 1, m_1, m_2)) = 3$. Berdasarkan Teorema 2.3 diperoleh $\gamma_M(K_{1,2}(3; m_1, m_2)) = 3$. □

Teorema 3.4 berikut ini menyatakan semua pohon T dengan bilangan dominasi-lokasi-metrik 3.

Teorema 3.4. *Misalkan T adalah pohon. Diperoleh $\gamma_M(T) = 3$ jika dan hanya jika T adalah satu dari graf berikut ini:*

(1) $T \cong P_n$, *untuk* $n = 7, 8, 9$,
(2) $T \cong K_{1,3}$,
(3) $T \cong K_{1,3}(k; m_1, \ldots, m_k)$ *untuk* $k = 1, 2$ *dan* $m_i = 1, 2, 3$, $i \in [1, k]$.
(4) $T \cong K_{1,3}(3; 1, m_1, m_2)$ *untuk* $m_1, m_2 = 1, 2$.

Bukti. Misalkan T adalah suatu pohon. Jika $T \cong P_n$, untuk $n = 7, 8, 9$, maka berdasarkan Teorema 2.2 diperoleh $\gamma_M(T) = 3$. Jika $T \cong K_{1,3}$ atau $T \cong K_{1,3}(k; m_1, \ldots, m_k)$ untuk $k = 1, 2$ dan $m_i = 1, \ldots, k$, atau $T \cong K_{1,3}(3; 1, m_1, m_2)$ untuk $m_1, m_2 = 1, 2$, berdasarkan Lemma 3.3 diperoleh $\gamma_M(T) = 3$.

Selanjutnya dibuktikan arah sebaliknya. Misalkan $\gamma_M(T) = 3$. Andaikan T mempunyai titik pendan lebih dari 3, berdasarkan Lema 3.1 diperoleh $\gamma_M(T) > 3$, kontradiksi dengan $\gamma_M(T) = 3$. Jadi T mempunyai titik pendan maksimal 3. Kemudian, karena T adalah pohon, T memiliki titik pendan minimal 2. Dengan demikian titik pendan dari T adalah sebanyak 2 atau 3.

Jika titik pendan T sebanyak 2 maka $T \cong P_n$. Berdasarkan Teorema 2.2 diketahui $\gamma_M(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Dengan demikian, $\gamma_M(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil = 3$ hanya dipenuhi oleh $n = 7, 8, 9$. Jadi $T \cong P_n$ dengan $n = 7, 8, 9$.

Jika titik pendan dari T sebanyak 3 maka berdasarkan Lemma 3.2, T adalah $K_{1,3}$ atau subdivisi dari $K_{1,3}$. Perhatikan bahwa $K_{1,3}$ dan subdivisi dari $K_{1,3}$ memiliki 1 titik mayor ekterior dan total derajat terminal dari titik mayor eksterior tersebut adalah 3. Berdasarkan Teorema 2.1 maka diperoleh $\beta(T) = 2$. Karena $\max\{\gamma(T), \beta(T)\} \leq \gamma_M(T) \leq \beta(T) + \gamma(T)$, ada tiga kemungkinan dari bilangan dominasi dari T.

Kasus 1 $\gamma(T) = 1$. Ini terjadi jika T mempunyai suatu titik berderajat penuh dan

karena T memiliki tiga titik pendan, diperoleh $T \cong K_{1,3}$.
Kasus 2. $\gamma(T) = 2$. Ini terjadi jika ada himpunan dominasi minimum D dari T dengan kardinalitas 2. Misalkan $D = \{v_1, v_2\}$. Pandang ketetanggaan dari v_1 dan v_2, jika $v_1 \sim v_2$ dan dengan memperhatikan bahwa T memiliki tiga titik pendan maka $T \cong K_{1,3}(1;1)$. Jika $v_1 \not\sim v_2$ maka $2 \leq d(v_1, v_2) \leq 3$, untuk $d(v_1, v_2) = 2$ diperoleh $T \cong K_{1,3}(1;2)$ dan untuk $d(v_1, v_2) = 3$ diperoleh $T \cong K_{1,3}(1;3)$. Dengan demikian, $T \cong K_{1,3}(1;m_1)$, $m_1 = 1, 2, 3$.
Kasus 3. $\gamma(T) = 3$. Ini terjadi jika ada himpunan dominasi minimum D dari T dengan kardinalitas 3. Misalkan $D = \{v_1, v_2, v_3\}$. Pandang ketetanggaan dari v_1, v_2 dan v_3. Perhatikan bahwa T adalah pohon, akibatnya $T[\{v_1, v_2, v_3\}]$ tidak membentuk klik. Selanjutnya, karena $D = \{v_1.v_2, v_3\}$ adalah himpunan dominasi minimum dari T, untuk setiap $v_i \in D$ terdapat $v_j \in D$ sedemikian sehingga $d(v_i, v_j) \leq 3$. Jika terdapat $d(v_i, v_j) = 1$ maka diperoleh $T \cong K_{1,3}(2;1,1), T \cong K_{1,3}(1,2)$ dan $T \cong K_{1,3}(2;1,3)$. Jika tidak ada $d(v_i, v_j) = 1$ maka diperoleh $T \cong K_{1,3}(2;2,2), T \cong K_{1,3}(2;2,3), T \cong K_{1,3}(2;3,3), T \cong K_{1,3}(3;1,1,1)$ dan $T \cong K_{1,3}(3;1,1,2)$. Dengan demikian, $T \cong K_{1,3}(2;m_1,m_2)$, $m_1, m_2 = 1, 2, 3$ atau $T \cong K_{1,3}(3;1,m_1,m_2)$, $m_1, m_2 = 1, 2$. □

Teorema 3.5. *Tidak ada pohon T orde $n \geq 3$ dengan $\gamma_M(T) = \beta(T)$.*

Bukti. Andaikan ada pohon T dengan $\gamma_M(T) = \beta(T)$. Dari Teorema 2.5, diperoleh $\gamma(T) = k$, dimana $k = |D \cap R|$ dimana D dan R berturut-turut adalah himpunan dominasi dan himpunan pembeda minimum dari T. Akibatnya $D \subseteq R$. Jika T mempunyai titik pendukung kuat u, maka $u \in D$ tetapi $u \notin R$. Hal ini kontradiksi dengan $D \subseteq R$. Jika T tidak mempunyai titik pendukung kuat, maka setiap stem dari T mempunyai paling banyak satu lintasan cabang dengan panjang 1. Perhatikan bahwa salah satu titik dari $\{a, b\}$ dengan $d(a) = 1$ dan $a \sim b$ termuat pada setiap himpunan dominasi minimum dari T. Akan tetapi terdapat satu lintasan cabang dari setiap stem dari T dengan semua titik tidak berada di himpunan pembeda minimum dari T. Dengan demikian terdapat $u \in D$ tetapi $u \notin R$. Hal ini kontradiksi dengan $D \subseteq R$. □

Daftar Pustaka

[1] Brigham, R.C., Chartrand, G., Dutton, R.D. dan Zhang, P., 2003. Resolving domination in graphs. *Mathematica Bohemica*, **Volume** 128(1), pp.25-36.
[2] Susilowati, L., Saadah, I., Fauziyyah, R. Z., Erfanian, A., 2020: The dominant metric dimension of graphs, *Heliyon*, 6(3), e03633.
[3] Wangguway, Y., Wardani, D., Alfarisi, R.,2020, On resolving domination number of special family of graphs, *dalam Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 1465, IOP Publishing, 012015.
[4] Kurniawati, S., Wardani, D., Albirri, E., 2020, On resolving domination number of friendship graph and its operation, *dalam Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 1465, IOP Publishing, 012019.
[5] Adirasari, R. P., Suprajitno, H. dan Susilowati, L., 2021, The dominant metric dimension of corona product graphs, *Baghdad Science Journal*, 18(2), 03490349.

[6] Henning, M.A. dan Oellermann, O.R., 2004. Metric-locating-dominating sets in graphs. *Ars Combinatoria*, **Volume** 73(129-141), p.94.

[7] Zulfaneti, Assiyatun, H. dan Baskoro, E. T., 2022: On metric-location-domination number of graphs, *International Journal of Mathematics and Computer Science*, **Vol:**17(4), 17211733.

[8] González, A., Hernando, C. dan Mora, M., 2018. Metric-locating-dominating sets of graphs for constructing related subsets of vertices. *Applied mathematics and computation*, 332, pp.449-456.

[9] Cáceres, J. dan Pelayo, I.M., 2023. Metric Location in Pseudotrees: A survey and new results. *arXiv preprint arXiv:2307.13403.*

[10] Zulfaneti. 2024. *Penentuan dan Karakterisasi Bilangan Dominasi-Lokasi-Metrik Beberapa Kelas Graf.* Disertasi di Institut Teknologi Bandung. Tidak diterbitkan.

[11] Slater, P. J., 1975. Leaves of trees,*Proc. 6th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Congr. Numer.*, 14, 549559.

[12] Zulfaneti dan Baskoro, E.T., 2021. The Metric-Location-Domination Number of k-Paths. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1722, No. 1, p. 012054). IOP Publishing.